E.N.S.E.T. Section B : (TA)

Durée : 3 heures

L'épreuve est constituée de quatre problèmes obligatoires. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

Soit A_α la matrice carrée :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 3-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

α étant un réel donné.

1° Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle cette matrice A_α est diagonalisable. Déterminer, dans ce cas, les puissances entières successives $(A_\alpha)^n$ de cette matrice ($n \geqslant 1$).

2° On suppose que A_α est non diagonalisable. Montrer qu'il existe 2 réels β et γ et une matrice Q inversible (dépendant éventuellement de α) telle que :

$$Q^{-1} A_\alpha Q = B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

On note J la matrice $B - \gamma I$. Déterminer les puissances entières successives J^n de J.

En déduire la forme de $(A_\alpha)^n$, ($n \geqslant 1$).

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$ où Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

1° Montrer que f est bijective.

2° On suppose qu'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_p$ p éléments de E tels que les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_p, f(a_1), \ldots f(a_{p-1})$ soient linéairement indépendants. Montrer que $a_1, a_2, \ldots, a_p, f(a_1), \ldots, f(a_{p-1}), f(a_p)$ constituent un système de vecteurs linéairement indépendants.

3° On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie. Montrer que l'existence de l'endomorphisme f tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$ entraîne que la dimension de E est paire et qu'il existe des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de E tels que

$$\{ a_1, a_2, \ldots, a_p, f(a_1), f(a_2) \ldots, f(a_p) \}$$

constitue une base de E.

Déterminer l'image matricielle de cet endomorphisme f relativement à une telle base.

4° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie paire. Montrer qu'il existe un endomorphisme f vérifiant $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

TROISIÈME PROBLÈME

Soit la fonction réelle de variable réelle définie par :

$$f(x) = x^{-\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Log}\, x}}\right)}$$

« Log » désignant le logarithme népérien.

1° Déterminer le domaine de définition de f, son domaine de dérivabilité et tracer le graphe de cette fonction.

2° Montrer que l'intégrale généralisée :

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx \text{ est convergente.}$$

3° A tout x réel positif, on associe l'entier unique noté $[x]$ (partie entière de x) déterminé par :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

D'autre part, on considère la série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ définie par : $u_n = f(n)$.

Montrer que : $\forall x > 3$

$$\sum_{n=3}^{n=[x]} u_n \leqslant \int_2^x f(t)\,dt \leqslant \sum_{n=2}^{n=[x]} u_n$$

4° Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

5° Soit a un réel positif donné. Quelle est la nature de la série de terme général :

$$v_n = n^{-\left(a + \frac{1}{\sqrt{\text{Log } n}}\right)} ?$$

QUATRIÈME PROBLÈME

Soit P un polynôme du second degré :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

On suppose :

a. a, b, c sont des entiers relatifs.

b. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists b_n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n) = b_n^2$.

1° Montrer que :

1. $a > 0$ (autrement dit $a \in \mathbb{N}^*$).
2. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x > A \quad P(x) > 0$.

2° On définit la fonction f par :

$$f(x) = \sqrt{P(x)} \qquad \forall x > A$$

Montrer qu'il existe une fonction h tendant vers 0 lorsque la variable tend vers l'infini telle que :

$$(1) \qquad f(x) = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + h(x)$$

et que :

$$(2) \qquad h^2(x) + 2h(x)\left[\frac{b}{2\sqrt{a}} + x\sqrt{a}\right]$$

est une constante pour $x > A$.

3° Montrer que pour n entier assez grand $f(n+1) - f(n)$ est un entier. En déduire, à l'aide de la relation (1), que $\sqrt{a}$ est un entier et que :

$$\exists N_1 \text{ tel que : } n > N_1 \Rightarrow h(n+1) = h(n)$$

4° Montrer que si $n > A$:

$$2an + b + 2\sqrt{a}\,h(n) \text{ est un entier.}$$

En déduire qu'il existe N_2 tel que :

$$h(n) = 0 \qquad \forall n > N_2$$

Que peut-on en déduire pour la constante définie par l'expression (2) ?

5° Montrer que $h(x) = 0$ pour $x > A$ et que $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ est un entier.

6° Déduire de ce qui précède que $P(x) = (\alpha x + \beta)^2$ où α et β sont des entiers.